ANALISI MATEMATICA B

Esercizio 1. È data la funzione di 2 variabili reali $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2}$.

A) Ammette prolungamento continuo in $O = (0,0)$?

B) La si consideri ora in $P_0 = (1,1)$. Qual è la formula di Taylor al primo ordine di punto iniziale P_0 e qual è il suo significato geometrico?

C) Scrivere ora la formula al secondo ordine e da essa e dalla segnatura della matrice hessiana in P_0 dedurre la posizione locale della superficie grafico rispetto al piano tangente (localmente sopra, localmente sotto o attraversa il piano?).

Esercizio 2. Determinare il baricentro della figura piana

$$A = \{(x,y) : 0 \le x \le \sqrt{y}, 0 \le y \le 1\}$$

usando nei calcoli delle due coordinate una volta l'ordine di integrazione $dxdy$ e l'altra volta l'ordine $dydx$. Dedurne poi i volumi dei due solidi di rotazione che si ottengono ruotando A con rotazioni complete attorno all'asse y ed attorno all'asse x.

Esercizio 3. Si consideri la curva γ nello spazio di equazioni cartesiane

$$x^2 + y^2 = 1, z = x, x \ge 0, 0 \le y \le 1/2.$$

A) Parametrizzare γ, esprimere lo spostamento elementare ds e calcolare l'integrale di funzione scalare $\displaystyle\int_\gamma xyds$.

B) S orienti ora γ in maniera che $(1,0,1)$ sia il punto iniziale e si calcoli il lavoro su γ del campo vettoriale $F = (2(x-z), 1/(y+1), 2(z-x))$ usando la definizione di integrale $\displaystyle\int_\gamma F$.

C) Dopo aver motivato l'esistenza di potenziali di F nel semispazio $y > -1$, trovare uno di essi e verificare il risultato di B).

Esercizio 4. Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = u(t)te^{-t}$, $u(t)$ il gradino unitario, e verificare il risultato con la formula di antitrasformazione.

Esercizio 5. Si consideri la funzione $x(t) = (1 - |t|) \cdot 1_{(-1,1)}$. Dopo aver motivato il fatto che la derivata usuale e la derivata nel senso delle distribuzioni coincidono, si prenda x' e seguendo la definizione si calcoli la sua derivata x'' nel senso debole. Si calcoli poi la trasformata $\widehat{x''}$ e da essa si deduca $\hat{x}(\omega)$ per $\omega \ne 0$. Evidenziato infine il valore notevole $\hat{x}(0)$, se ne verifichi la relazione attesa coi valori $\hat{x}(\omega)$ per $\omega \ne 0$.

Date: 28 luglio 10.